Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaf...

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaf...

Ueber die

VIERFACH PERIODISCHEN FUNCTIONEN

zweier Variabeln,

auf die sich die

Theorie der Abel'schen Transcendenten

stützt.

Von

C. G. J. JACOBI,

ordentl. Prof. der Math. zu Königsberg.

(Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 13, 1834.)

Herausgegeben

von

H. Weber.

Aus dem Lateinischen übersetzt

von

A. Witting.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1895.

[55]

Ueber die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln,

auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt.

Von

C. G. J. Jacobi,

ord. Prof. d. Math. zu Königsberg.

1.

In den »Fundamenta Nova Functionum Ellipticarum« habe ich darauf hingewiesen (pg. 85), dass eine doppelte Periode die allgemeinste Periodicität umfasse, die in der Analysis gebildet werden könne. Dies soll im Folgenden genauer untersucht werden.

Periodisch nenne ich eine Function $\lambda(u)$, wenn es eine Constante i giebt, sodass für ein beliebiges u

$$\lambda(u+i) = \lambda(u) .$$

Die Constante i nenne ich den *Index* der Function. Es ist aber offenbar, dass aus einem Index unzählige andere hervorgehen, da jedes beliebige positive oder negative Vielfache selbst ein Index ist. Von allen diesen nenne ich den, von dem kein aliquoter Theil Index der Function ist, den *eigentlichen* Index. In den Elementen werden die periodischen Functionen $\sin u$, e^u behandelt, deren eigentliche Indices resp. 2π, $2\pi\sqrt{-1}$ sind.

Nun nehmen wir an, wofür ein erstes Beispiel bei den elliptischen Functionen nachgewiesen ist, dass die Function $\lambda(u)$

zwei Perioden habe, die sich nicht auf eine zurückführen lassen. Ihre Indices seien i, i', sodass die Gleichungen statt haben:

$$\lambda(u+i) = \lambda(u) \qquad \lambda(u+i') = \lambda(u)\,,$$

aus denen, wenn m, m' irgend welche ganze positive oder negative Zahlen bezeichnen, die allgemeinere Gleichung

$$\lambda(u+mi+m'i') = \lambda(u)$$

folgt; d. h. auch $mi+m'i'$ wird ein Index sein. Zuerst nun ist klar, *dass man die Indices als unter einander incommensurabel annehmen muss.* Denn wäre Δ ihr grösstes gemeinsames Maass, so könnte man

$$i = m\Delta \qquad i' = m'\Delta$$

setzen, wo m, m' ganze relative Primzahlen bezeichnen. Daher können wir zwei andere Zahlen n, n' so bestimmen, dass

[56] $$mn + m'n' = 1.$$

Nun aber folgt der Index

$$ni + n'i' = \Delta\,,$$

und da aus diesem einen die Indices i, i' als seine Vielfachen hervorgehen, so sehen wir: *wenn die Indices zweier Perioden einer Function unter sich commensurabel sind, so gehen die beiden Perioden auf eine einzige zurück, deren Index das grösste gemeinsame Maass jener ist.*

Da in dem Vorhergehenden gezeigt ist, dass der *Quotient zweier Indices*, die nicht aus einem hervorgehen, nicht als rationale Grösse angenommen werden kann, so ist auch weiter leicht einzusehen, *dass man ihn nicht als reelle Grösse annehmen darf.* Sei nämlich

$$i = \varepsilon\Delta\,, \quad i' = \varepsilon'\Delta\,,$$

wo $\varepsilon, \varepsilon'$ reelle, unter sich incommensurable Grössen bedeuten, so lassen sich zwei solche ganze positive oder negative Zahlen m, m' finden, dass

$$m\varepsilon + m'\varepsilon' = \varepsilon''$$

kleiner als irgend eine gegebene Grösse wird. Dann wird

$$\lambda(u+mi+m'i') = \lambda(u+\varepsilon''\Delta) = \lambda(u)\,,$$

es würde also die Function $\lambda(u)$ einen Index haben, der kleiner

als irgend eine gegebene Grösse ist und doch nicht verschwindet. Das aber kann nicht sein.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass, so oft von Perioden, die nicht auf eine zurückgehen, die Indices imaginäre Grössen sind:

$$i = a + b\sqrt{-1} \quad i' = a' + b'\sqrt{-1}\,,$$

wo a, b, a', b' reelle Grössen bezeichnen, niemals

$$a b' - a' b = 0$$

sein kann. Dann nämlich würde der Quotient der Indices

$$\frac{a' + b'\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

eine reelle Grösse sein.

2.

Untersuchen wir nun, ob eine Function drei Perioden haben kann, die sich nicht aus zweien zusammensetzen lassen. Seien die Indices dreier solcher Perioden

$$i = a + b\sqrt{-1}\,, \quad i' = a' + b'\sqrt{-1}\,, \quad i'' = a'' + b''\sqrt{-1},$$

wo a, b, a', b', a'', b'' reelle Grössen bedeuten. Wir setzen nach dem Vorhergehenden voraus, dass von den Grössen

$$a' b'' - a'' b', \quad a'' b - a b'', \quad a b' - a' b$$

keine verschwindet. Denn sonst würden sich entweder zwei Perioden auf eine reduciren, was gegen die Voraussetzung ist, oder die Function würde einen Index haben, der kleiner ist, als irgend eine gegebene Grösse, ohne doch zu verschwinden, [**57**] was absurd ist. Zunächst nun bemerke ich, dass sich jene drei Grössen nicht wie ganze Zahlen verhalten, oder nicht durch dieselbe Grösse gemessen werden können.

Nehmen wir nämlich an, es verhielte sich

$$a' b'' - a'' b' : a'' b - a b'' : a b' - a' b = m : m' : m'',$$

wo m, m', m''*) ganze Zahlen bedeuten, die wir als von gemeinsamen Factoren befreit annehmen. Dann ist

*) Hier und weiterhin nehmen wir die ganzen Zahlen sowohl als positiv, wie auch als negativ an.

$$ma + m'a' + m''a'' = 0\,,$$
$$mb + m'b' + m''b'' = 0\,,$$

und ebenso auch

$$mi + m'i' + m''i'' = 0\,.$$

Sei f das grösste gemeinsame Maass von m', m'', das zu m prim sein muss, da die drei Zahlen m, m', m'' nicht durch dieselbe Zahl getheilt werden; dann wird auch

$$\frac{mi}{f} = -\left[\frac{m'}{f}i' + \frac{m''}{f}i''\right]$$

ein Index der Function. Da nun die Indices i und $\frac{mi}{f}$ unter sich commensurabel sind mit dem grössten gemeinsamen Maass $\frac{i}{f}$, so wird auch $\frac{i}{f}$ Index sein, wie in § 1 bewiesen ist. Es mögen nun zwei Zahlen n', n'' so ausgewählt werden, dass

$$\frac{m'}{f}n' + \frac{m''}{f}n'' = 1\,;$$

dann, sage ich, setzen sich die drei Perioden aus zweien zusammen, deren Indices

$$\frac{i}{f} \text{ und } n''i' - n'i''$$

sind, da sich aus diesen der Index i und auch die übrigen Indices i', i'' zusammensetzen. Man hat nämlich

$$-mn'\frac{i}{f} + \frac{m''}{f}(n''i' - n'i'')$$
$$= n'\left[\frac{m'}{f}i' + \frac{m''}{f}i''\right] + \frac{m''}{f}(n''i' - n'i'') = i'\,;$$

$$-mn''\frac{i}{f} - \frac{m'}{f}(n''i' - n'i'')$$
$$= n''\left[\frac{m'}{f}i' + \frac{m''}{f}i''\right] - \frac{m'}{f}(n''i' - n'i'') = i''\,.$$

Also, wenn sich die drei Grössen

$$a'b'' - a''b',\quad a''b - ab'',\quad ab' - a'b$$

verhalten wie ganze Zahlen, oder, was dasselbe ist, *wenn m, m', m'' ganze Zahlen bezeichnen und zwischen den Indices i, i', i'' eine Gleichung*

$$mi + m'i' + m''i'' = 0$$

besteht, so lassen sich die [58] *drei Perioden aus zweien zusammensetzen, oder die Function ist nur zweifach periodisch.*

Ich bemerke an zweiter Stelle, *dass, wenn α, α', α'' ganze Zahlen bedeuten, auch keine Gleichung der Form*

$$\alpha(a'b'' - a''b') + \alpha'(a''b - ab'') + \alpha''(ab' - a'b) = 0$$

bestehen kann. Denn nehmen wir sechs ganz beliebige andere ganze Zahlen

$$\beta, \beta', \beta''; \qquad \gamma, \gamma', \gamma'',$$

an und setzen

$$\begin{aligned} u &= (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')a + (\gamma''\alpha - \gamma\alpha'')a' + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)a'', \\ u' &= (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')a + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')a' + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)a'', \\ v &= (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')b + (\gamma''\alpha - \gamma\alpha'')b' + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)b'', \\ v' &= (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')b + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')b' + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)b'', \end{aligned}$$

so werden auch

$$u + v\sqrt{-1}, \quad u' + v'\sqrt{-1}$$

Indices der vorgelegten Function sein.

Setzt man nun

$$\varepsilon = \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \alpha'(\beta''\gamma - \beta\gamma'') + \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma),$$

so findet man

$$uv' - u'v = \varepsilon[\alpha(a'b'' - a''b') + \alpha'(a''b - ab'') + \alpha''(ab' - a'b)].$$

Hieraus folgt, wenn der Klammerausdruck verschwindet,

$$uv' - u'v = 0.$$

Dass aber diese Gleichung nur statt haben kann, wenn die Indices

$$u + v\sqrt{-1}, \qquad u' + v'\sqrt{-1}$$

commensurabel sind oder aus einem Index hervorgehen, haben wir im § 1 gesehen. In diesem Falle kann man, wenn f, f' ganze Zahlen bezeichnen, setzen

$$f(u + v\sqrt{-1}) - f'(u' + v'\sqrt{-1}) = 0,$$

eine Gleichung, die unter Einsetzung der Werthe von u, v, u', v' die Form annimmt

$$mi + m'i' + m''i'' = 0\,,$$

wo m, m', m'' ganze Zahlen bedeuten; dass dies nicht angängig ist, haben wir gezeigt.

3.

Nach diesen Vorbereitungen werde ich nun zeigen, *dass, wenn die drei Perioden sich nicht auf eine zurückführen lassen, man immer ganze Zahlen* m, m', m'' *bestimmen kann, sodass jeder der beiden Ausdrücke*

$$ma + m'a' + m''a''$$
$$mb + m'b' + m''b''$$

kleiner wird als irgend eine gegebene Grösse, oder dass die vorgelegte Function [**59**] *einen Index hat, der kleiner ist, als irgend eine gegebene Grösse, ohne jedoch zu verschwinden.*

Ich setze der Kürze halber:

$$a'b'' - a''b' = A\,, \quad a''b - ab'' = A'\,, \quad ab' - a'b = A''\,,$$

sodass

$$aA + a'A' + a''A'' = 0\,, \quad bA + b'A' + b''A'' = 0\,.$$

Bezeichnen ferner α, α', α'' ganze Zahlen, so setze ich

$$\frac{\alpha A'}{A} - \alpha' = \varDelta\,, \quad \frac{\alpha A''}{A} - \alpha'' = \varDelta'\,,$$

sodass

$$\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' = -\,[a'\varDelta + a''\varDelta']\,,$$
$$\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' = -\,[b'\varDelta + b''\varDelta']\,.$$

Nun kann man die Zahlen α, α' so bestimmen, dass $\varDelta$ kleiner als irgend eine gegebene Grösse wird. Ferner lässt sich nach Bestimmung von α, α' die dritte Zahl α'' so annehmen, dass ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\varDelta' < \tfrac{1}{2}$$

wird. Bestimmt man so α, α', α'', so werden die obigen Ausdrücke der Reihe nach absolut genommen kleiner als $\frac{1}{2}a''$ [illegible] $\frac{1}{2}b''$. *Sind* also *die Grössen* a, a', a'' *und* b, b' b'' *ge-*

geben, so lassen sich immer ganze Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha''$ *derart bestimmen, dass, wenn*

$$a''' = \alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'', \quad b''' = \alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b''$$

gesetzt wird, zugleich

$$a''' < \tfrac{1}{2} a'', \qquad b''' < \tfrac{1}{2} b''$$

wird, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen.

Es möge nun der Reihe nach gesetzt werden

$$\begin{array}{ll}
\beta a' + \beta' a'' + \beta'' a''' = a^{IV}, & \beta b' + \beta' b'' + \beta'' b''' = b^{IV}, \\
\gamma a'' + \gamma' a''' + \gamma'' a^{IV} = a^{V}, & \gamma b'' + \gamma' b''' + \gamma'' b^{IV} = b^{V}, \\
\delta a''' + \delta' a^{IV} + \delta'' a^{V} = a^{VI}, & \delta b''' + \delta' b^{IV} + \delta'' b^{V} = b^{VI}. \\
\dots & \dots
\end{array}$$

Nach dem Vorhergehenden lassen sich die Coefficienten dieser Gleichungen β, γ etc., β', γ' etc., β'', γ'' etc., so annehmen, dass ohne Rücksicht auf das Vorzeichen gleichzeitig wird

$$\begin{array}{lll}
a^{IV} < \tfrac{1}{2} a''', & a^{V} < \tfrac{1}{2} a^{IV}, & a^{VI} < \tfrac{1}{2} a^{V}, \text{ etc.} \\
b^{IV} < \tfrac{1}{2} b''', & b^{V} < \tfrac{1}{2} b^{IV}, & b^{VI} < \tfrac{1}{2} b^{V}, \text{ etc.}
\end{array}$$

Daraus folgt, dass die Glieder der beiden Reihen

$$\begin{array}{llllll}
a'', & a''', & a^{IV}, & a^{V}, & a^{VI}, & \dots \\
b'', & b''', & b^{IV}, & b^{V}, & b^{VI}, & \dots
\end{array}$$

bei genügender Fortsetzung kleiner werden, als irgend eine gegebene Grösse.

[**60**] Seien die entsprechenden Glieder $a^{(n)}$, $b^{(n)}$ der beiden Reihen kleiner als eine gegebene Grösse. Betrachtet man die Bildung der Gleichungen, durch die jene Grössen von den vorhergehenden abhängen, so erhellt ohne Mühe, dass man sie durch die Grössen a, a', a'' und b, b', b'' vermöge der Gleichungen

$$\begin{aligned}
a^{(n)} &= m a + m' a' + m'' a'', \\
b^{(n)} &= m b + m' b' + m'' b'',
\end{aligned}$$

ausdrücken kann, in denen die Coefficienten m, m', m'' ganze Zahlen sind. Man erkennt ferner, dass diese Coefficienten in jeder der beiden Gleichungen dieselben sind, da die Grössen $a^{(n)}$, $b^{(n)}$ bez. durch dieselben Gleichungen von den ihnen vorhergehenden abhängen. Hierdurch ist bewiesen, was behauptet war, dass man positive oder negative ganze Zahlen

m, m', m'' so bestimmen kann, dass gleichzeitig jeder der beiden Ausdrücke

$$ma + m'a' + m''a''$$
$$mb + m'b' + m''b''$$

kleiner als eine gegebene Grösse wird.

Der bezeichnete Algorithmus, durch den die Glieder der beiden Reihen nach einander gefunden werden, wird nicht gestört, wenn ein Glied der einen Reihe verschwindet. Dann freilich wird das nächste Glied nicht kleiner als die Hälfte von diesem, da es nichts kleineres als ein verschwindendes Glied giebt, wenn man von den Vorzeichen absieht. Aber man erkennt leicht, dass, wenn ein Glied der einen Reihe verschwindet, man das nächste kleiner als irgend eine gegebene Grösse machen kann. Sei beispielsweise $a'' = 0$, so findet sich das nächste Glied

$$a''' = -a'\Delta,$$

wo Δ kleiner als irgend eine gegebene Grösse gemacht werden konnte. Unter Benutzung also dieses Gliedes und unter Vorgabe irgend einer kleineren Grösse wird man den Algorithmus fortsetzen, bis auch die Glieder der anderen Reihe kleiner werden als die gegebene Grösse. Es können aber nie zwei entsprechende Glieder der beiden Reihen zugleich verschwinden. Denn wäre gleichzeitig

$$a^{(n)} = 0, \qquad b^{(n)} = 0,$$

so gäbe es Zahlen m, m', m'', für die zugleich

$$a^{(n)} = ma + m'a' + m''a'' = 0,$$
$$b^{(n)} = mb + m'b' + m''b'' = 0,$$

und gleicherweise

$$mi + m'i' + m''i'' = 0.$$

Dass aber dies nur stattfinden kann, wenn sich nicht die drei Perioden aus zwei zusammensetzen lassen, haben wir im § 2 gesehen.

Der bezeichnete Algorithmus setzt ferner voraus, dass niemals

$$a^{(n)}b^{(n+1)} - a^{(n+1)}b^{(n)} = 0;$$

[61] was folgendermaassen klar wird. Sei nämlich

$$a^{(n+1)} = pa + p'a' + p''a'', \quad b^{(n+1)} = pb + p'b' + p''b''.$$

Dann wird

$$0 = a^{(n)}b^{(n+1)} - a^{(n+1)}b^{(n)} =$$
$$(m'p'' - m''p')(a'b'' - a''b') + (m''p - mp'')(a''b - ab'')$$
$$+ (mp' - m'p)(ab' - a'b).$$

Diese Gleichung kann aber, wie im § 2 gezeigt ist, nicht statt haben.

4.

Setzen wir

$$a^{(n)} + b^{(n)}\sqrt{-1} = i^{(n)},$$

so ist klar, dass i''', i^{IV}, i^{V} etc. Indices der vorgelegten Function werden. Wir haben mithin einen ganz bestimmten Algorithmus angegeben, durch den aus drei gegebenen imaginären Indices eine unendliche Reihe von Indices gebildet wird, deren reeller und imaginärer Theil zugleich kleiner als irgend eine gegebene Grösse wird, ohne doch gleichzeitig verschwinden zu können. Daher ist allenthalben unumstösslich bewiesen: *wenn eine vorgelegte Function drei Perioden hat, so lassen sich diese entweder aus zweien zusammensetzen, oder die Function hat einen Index, der kleiner ist als jede gegebene Grösse.* Da dies absurd ist, *so giebt es keine dreifach periodische Function.*

Man sieht also, dass wir mit gutem Rechte gesagt haben, dass eine zweifache Periode die gesammte Periodicität erschöpft. Aber das gilt nur von Functionen einer Variabeln. Betrachtet man Functionen mehrerer Veränderlichen, so braucht man bei weitem nicht bei einer zweifachen Periode stehen zu bleiben.

Beispiele von Functionen mehrerer Variabeln, die mehr als zwei Perioden haben, bieten diejenigen Functionen dar, die ich zuerst in den »Commentatiuncula *de transcendentibus Abelianis*« (Cr. J. Band IX. pag. 394) betrachtet habe. Aber dieser wichtige Gegenstand muss nochmals gründlicher erörtert werden.

Sei

$$u = C + \frac{2A}{\pi}\varphi + A_1 \sin 2\varphi + A_2 \sin 4\varphi + A_3 \sin 6\varphi + \cdots$$

eine für alle reellen Werthe von φ convergente Reihe. Setzen wir fest, dass x eine völlig bestimmte Function von $\sin^2\varphi$ ist, z. B. eine rationale Function. Aendert man φ in $\varphi + \pi$,

so wird x nicht geändert, wohl aber wird u in $u + 2A$ übergeführt. Wenn also

$$x = \lambda(u),$$

so folgt

$$\lambda(u + 2A) = \lambda(u).$$

Es wird daher $\lambda(u)$ eine periodische Function sein und ihr Index $2A$.

Betrachten wir nun folgendes Integral

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha + \beta x)\, \mathrm{d}x}{\sqrt{[x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)]}} = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\mathrm{d}x}{\sqrt{X}},$$

[62] wobei $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 reelle positive Grössen, kleiner als die Einheit, bezeichnen. Wir untersuchen nun die Werthe, die dieses Integral bei wachsendem x für reelle Werthe zwischen $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt. Sei $\varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2$ so unterscheiden wir 6 Intervalle, innerhalb derer x sich bewegen kann:

$$1.\ -\infty \cdots 0, \qquad 2.\ 0 \cdots 1, \qquad 3.\ 1 \cdots \frac{1}{\varkappa^2},$$

$$4.\ \frac{1}{\varkappa^2} \cdots \frac{1}{\lambda^2}, \qquad 5.\ \frac{1}{\lambda^2} \cdots \frac{1}{\mu^2}, \qquad 6.\ \frac{1}{\mu^2} \cdots \infty.$$

Im ersten, dritten und fünften Intervalle wird der Werth von X negativ, im zweiten, vierten und sechsten positiv sein. Fragen wir nun, wie sich x in den einzelnen Intervallen so durch $\sin^2\varphi$ ausdrückt, dass sich das vorgelegte Integral u in eine unendliche convergente Reihe der bezeichneten Form

$$u = C + \frac{2A}{\pi}\varphi + A_1 \sin 2\varphi + A_2 \sin 4\varphi + A_3 \sin 6\varphi + \cdots$$

entwickeln lässt. Wenn dies geschehen ist, setze man $x = \lambda(u)$ und hat dadurch in $\lambda(u)$ eine periodische Function mit dem Index $2A$, nämlich

$$2A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}\varphi.$$

1°. Wenn der Variabeln x ein negativer Werth zukommt, so setze man

$$1.\quad x = \frac{-1}{\mu^2 \sin^2\varphi};$$

wächst x von $-\infty$ bis 0, so nimmt φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu. Führt man die Substitution aus und setzt der Kürze halber

$$\varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2, \quad \lambda'^2 = 1 - \lambda^2, \quad \mu'^2 = 1 - \mu^2,$$

so findet man

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}}$$

$$= \frac{2}{\varkappa\lambda}\int_0^\varphi \frac{[(\beta + \alpha\mu^2)\sin^2\varphi - \beta]\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\left[(1-\mu'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa^2-\mu^2}{\varkappa^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\right]}}.$$

Setzt man

$$u_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}}$$

$$= \frac{2}{\varkappa\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(\alpha\mu^2 + \beta)\sin^2\varphi - \beta]\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\left[(1-\mu'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa^2-\mu^2}{\varkappa^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\right]}},$$

so wird nun

[63] $$u = \frac{u_1}{\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{2\sqrt{-1}}{\varkappa\lambda}\int_0^\varphi \frac{[(\alpha\mu^2 + \beta)\sin^2\varphi - \beta]\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\left[(1-\mu'^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{\varkappa^2-\mu^2}{\varkappa^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\right]}}.$$

Ich bemerke nun, dass ein Integral der Form

$$\int_0^\varphi \frac{(m + n\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{[(1 - p^2\sin^2\varphi)(1 - q^2\sin^2\varphi)(1 - r^2\sin^2\varphi)]}},$$

sofern p^2, q^2, r^2 reell und kleiner als die Einheit sind, sich immer in eine convergente Reihe der Form

$$\frac{2A}{\pi}\varphi + A_1\sin 2\varphi + A_2\sin 4\varphi + A_3\sin 6\varphi \ldots,$$

entwickeln lässt, wo

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(m + n\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{[(1 - p^2\sin^2\varphi)(1 - q^2\sin^2\varphi)(1 - r^2\sin^2\varphi)]}}.$$

Daher kann man u in der verlangten Weise entwickeln; und es wird

$$C = \frac{u_1}{\sqrt{-1}}, \qquad A = u_1 \sqrt{-1}.$$

Setzt man also $x = \lambda(u)$, so wird $\lambda(u)$ eine periodische Function mit dem Index $2u_1\sqrt{-1}$ sein, oder

$$\lambda(u + 2u_1\sqrt{-1}) = \lambda(u).$$

2°. Liegt x zwischen 0 und 1, so setze ich

$$2. \quad x = \sin^2\varphi;$$

es wird

$$u = 2\int_0^\varphi \frac{[\alpha + \beta\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{(1 - \varkappa^2\sin^2\varphi)(1 - \lambda^2\sin^2\varphi)(1 - \mu^2\sin^2\varphi)}}.$$

Setzt man also

$$u_2 = \int_0^1 \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\alpha + \beta\sin^2\varphi]\,d\varphi}{\sqrt{(1 - \varkappa^2\sin^2\varphi)(1 - \lambda^2\sin^2\varphi)(1 - \mu^2\sin^2\varphi)}},$$

so lässt sich u in die bezeichnete Form entwickeln, deren Coefficienten

$$C = 0, \qquad A = u_2$$

sind. Es wird deshalb $2u_2$ der andere Index der Function $x = \lambda(u)$ sein, oder man hat auch

$$\lambda(u + 2u_2) = \lambda(u).$$

3°. Liege nun x zwischen 1 und $\frac{1}{\varkappa_2}$, so setze ich

$$3. \quad x = \frac{1}{\cos^2\varphi + \varkappa^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{1 - \varkappa'^2\sin^2\varphi}.$$

Da nun das Integral u von 0 bis x genommen wird, so zerlege ich das Intervall in 2 Theile, den einen von 0 bis 1, den andern von 1 bis x. Dann finden wir nach Ausführung der Substitution

$$u = u_2$$

$$+ \frac{2\sqrt{-1}}{\lambda' \mu'} \int_0^{\varphi} \frac{[\alpha + \beta - \alpha \varkappa'^2 \sin^2 \varphi] \, d\varphi}{\sqrt{(1 - \varkappa'^2 \sin^2 \varphi) \left(1 - \frac{\varkappa'^2}{\lambda'^2} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{\varkappa'^2}{\lambda'^2} \sin^2 \varphi\right)}} .$$

[**64**] Setzt man

$$u_3 = \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{(\alpha + \beta x) \, d x}{\sqrt{-X}}$$

$$= \frac{2}{\lambda' \mu'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\alpha + \beta - \alpha \varkappa'^2 \sin^2 \varphi] \, d\varphi}{\sqrt{(1 - \varkappa'^2 \sin^2 \varphi) \left(1 - \frac{\varkappa'^2}{\lambda'^2} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{\varkappa'^2}{\lambda'^2} \sin^2 \varphi\right)}} ,$$

so lässt sich u in eine Reihe der vorgelegten Form entwickeln, deren erste Coefficienten

$$C = u_2 , \qquad A = u_3 \sqrt{-1} .$$

sein werden.

Daher hat die Function $x = \lambda(u)$ auch den Index $2 u_3 \sqrt{-1}$, oder es ist auch

$$\lambda(u + 2 u_3 \sqrt{-1}) = \lambda(u) .$$

4°. Gehen wir nun zum vierten Intervall zwischen $\frac{1}{\varkappa^2}$ und $\frac{1}{\lambda^2}$ über; hier setze ich

$$4. \quad x = \frac{\lambda'^2 \cos^2 \varphi + \varkappa'^2 \sin^2 \varphi}{\varkappa^2 \lambda'^2 \cos^2 \varphi + \lambda^2 \varkappa'^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\lambda'^2 - (\varkappa^2 - \lambda^2) \sin^2 \varphi}{\varkappa^2 \lambda'^2 - (\varkappa^2 - \lambda^2) \sin^2 \varphi} .$$

sodass, wenn x von $\frac{1}{\varkappa^2}$ bis $\frac{1}{\lambda^2}$ wächst, φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zunimmt. Nach Ausführung der Substitution geht das vorgelegte Integral über in folgendes:

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha + \beta x) \, d x}{\sqrt{X}} = u_2 + u_3 \sqrt{-1} - \frac{2}{\varkappa \lambda'^3 \sqrt{\varkappa^2 - \mu^3}} \times$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{[\lambda'^2 (\alpha \varkappa^2 + \beta) - (\varkappa^2 - \lambda^2)(\alpha + \beta) \sin^2 \varphi] \, d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{\varkappa^2 - \lambda^2}{\lambda'^2} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{\varkappa^2 - \lambda^2}{\varkappa^2 \lambda'^2} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{\mu'^2 (\varkappa^2 - \lambda^2)}{\lambda'^2 (\varkappa^2 - \mu^2)} \sin^2 \varphi\right)}} ,$$

Da sich dieses wiederum in die angegebene Form entwickeln lässt, so hat man unter der Bezeichnung

$$u_4 = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \frac{2}{\varkappa\lambda'^3\sqrt{\varkappa^2-\mu^2}} \times$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\lambda'^2(\alpha\varkappa^2+\beta)-(\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi]\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{\varkappa^2\lambda'^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\mu'^2(\varkappa^2-\lambda^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)}},$$

als erste Coefficienten der Entwickelung

$$C = u_2 + u_3\sqrt{-1}\,, \qquad A = u_4\,,$$

sodass also die Function $x = \lambda(u)$ den Index $2u_4$ hat, d. h.

$$\lambda(u+2u_4) = \lambda(u)\,.$$

5°. An fünfter Stelle liege x zwischen $\frac{1}{\lambda^2}$ und $\frac{1}{\mu^2}$ und in diesem Falle setzen wir:

$$5.\quad x = \frac{(\varkappa^2-\mu^2)\cos^2\varphi+(\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)\cos^2\varphi+\mu^2(\varkappa^2-\lambda^2)\sin^2\varphi}$$
$$= \frac{\varkappa^2-\mu^2-(\lambda^2-\mu^2)\sin^2\varphi}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)-\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)\sin^2\varphi},$$

sodass, wenn x von $\frac{1}{\lambda^2}$ bis $\frac{1}{\mu^2}$ wächst, φ wieder von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zunimmt. [65] Führt man die Substitution aus, so erhält man:

$$u = u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4 - \frac{2\sqrt{-1}}{\lambda\lambda'\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)^3}} \times$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{[(\varkappa^2-\mu^2)(\alpha\lambda^2+\beta)-(\lambda^2-\mu^2)(\alpha\varkappa^2+\beta)\sin^2\varphi]\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\varkappa^2-\mu^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa'^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Auch von diesem Ausdruck ist klar, dass er sich in die bezeichnete Form entwickeln lässt und

$$u_5 = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}} = \frac{2}{\lambda\lambda'\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)^3}} \times$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(\varkappa^2-\mu^2)(\alpha\lambda^2+\beta)-(\lambda^2-\mu^2)(\alpha\varkappa^2+\beta)\sin^2\varphi]\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda^2-\mu^2}{\varkappa^2-\mu^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\varkappa'^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda'^2(\varkappa^2-\mu^2)}\sin^2\varphi\right)}},$$

gesetzt wird, so sind die Coefficienten der Entwickelung

$$C = u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4\,, \qquad A = -u_5\sqrt{-1}\,.$$

Daher hat die Function $x = \lambda(u)$ auch den Index $2u_5\sqrt{-1}$ oder es wird

$$\lambda(u + 2u_5\sqrt{-1}) = \lambda(u)\,.$$

6°. Wenn sich endlich x im 6ten Intervalle zwischen $\frac{1}{\mu^2}$ und ∞ bewegt, so setze ich:

$$6. \quad x = \frac{1}{\mu^2} + \frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2\mu^2}\operatorname{tang}^2\varphi\,,$$

und es kommt

$$u = u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4 - u_5\sqrt{-1} + \frac{2}{\lambda^3\mu'\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)}} \times$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{[\lambda^2(\alpha\mu^2+\beta)-\mu^2(\alpha\lambda^2+\beta)\sin^2\varphi]\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda'^2\mu^2}{\mu'^2\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{(\varkappa^2-\lambda^2)\mu^2}{(\varkappa^2-\mu^2)\lambda^2}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Wenn man, was erlaubt ist, diesen Ausdruck in die bezeichnete Form entwickelt und setzt

$$u_6 = \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \frac{2}{\lambda^3\mu'^2\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)}} \times$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\lambda^2(\alpha\mu^2+\beta)-\mu^2(\alpha\lambda^2+\beta)\sin^2\varphi]\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{\lambda'^2\mu^2}{\mu'^2\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\left(1-\frac{(\varkappa^2-\lambda^2)\mu^2}{(\varkappa^2-\mu^2)\lambda^2}\sin^2\varphi\right)}},$$

so werden die ersten Coefficienten der Entwickelung

$$C = u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4 - u_5\sqrt{-1}\,, \qquad A = u_6\,,$$

und die Function $x = \lambda(u)$ wird auch den Index $2u_6$ haben oder es wird

$$\lambda(u + 2u_6) = \lambda(u) .$$

Wir haben also unsere Aufgabe bereits gelöst und gezeigt, wie sich für alle reellen Werthe von x das vorgelegte Integral

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}},$$

[66] in eine convergente Reihe der Form

$$u = C + \frac{2A}{\pi}\cdot\varphi + A'\sin 2\varphi + A''\sin 4\varphi + A'''\sin 6\varphi + \cdots$$

entwickeln lässt. Und die sechs untereinander verschiedenen Entwickelungen, die wir für die sechs Intervalle, in denen sich x bewegen kann, aufgestellt haben, lieferten ebensoviel Indices der periodischen Function $x = \lambda(u)$.

5.

Im Vorhergehenden haben wir für die einzelnen Intervalle solche Substitutionen angewendet, durch die das vorgelegte Integral immer in dieselbe Form

$$C + \int_0^\varphi \frac{(m + n\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{[(1 - p^2\sin^2\varphi)(1 - q^2\sin^2\varphi)(1 - r^2\sin^2\varphi)]}},$$

übergeht, wo p^2, q^2, r^2 kleiner als die Einheit sind; zugleich wächst φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, während x von der unteren Grenze des Intervalles bis zur oberen wächst. Dasselbe kann für die einzelnen Intervalle auch durch eine andere Substitution von der Form

$$x = \frac{d + e\sin^2\varphi}{f + g\sin^2\varphi}$$

erreicht werden, sodass, wenn die Variable x von der unteren bis zur oberen Grenze zunimmt, zugleich φ von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 abnimmt. Allgemeiner hat *Richelot* in einer Abhandlung, die bald das Licht erblicken wird, gezeigt, dass, wenn X irgend eine ganze rationale Function 6^{ten} Grades darstellt, die in reelle lineare Factoren zerlegt werden kann, das Integral

$$u = \int \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$

durch 12 reelle Substitutionen von der Form

$$x = \frac{d + e \sin^2\varphi}{f + g \sin^2\varphi}$$

auf die Form

$$\int \frac{(m + n \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(1 - p^2 \sin^2\varphi)(1 - q^2 \sin^2\varphi)(1 - r^2 \sin^2\varphi)}}$$

gebracht werden kann, wo p^2, q^2, r^2 reell, positiv und kleiner als die Einheit sind. Derselbe hat das auch auf den allgemeinen Fall angewendet, wo X von irgend beliebiger $2n^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Auf denselben Fall liessen sich daher auch die vorstehenden Betrachtungen ausdehnen. Uebrigens konnte man durch unzählige andere Substitutionen zu einer Integralform gelangen, die eine Entwickelung in eine convergente Reihe nach den Cosinus oder Sinus von Vielfachen desselben Winkels gestattet, eine Entwickelung, die allein hier nöthig ist. Doch [67] kann man nicht durch andere Substitutionen zu anderen Indices gelangen, es seien denn solche, die sich aus den von uns angegebenen zusammensetzen liessen.

Aber jene Indices, die wir bezeichnet haben, von denen drei reell, drei imaginär sind, stehen in solchen Beziehungen, dass ein reeller aus den beiden anderen reellen, ein imaginärer aus den beiden anderen imaginären sich zusammensetzen lässt. Im Folgenden wollen wir dies beweisen.

Das vorgelegte Integral

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$

ist nur bestimmt, wenn für die einzelnen Intervalle über das Vorzeichen der Wurzel eine Festsetzung getroffen ist. Da nun für jedes nächste Intervall ein neuer Factor des Radicanden das Vorzeichen ändert, so haben wir festgesetzt, dass dadurch immer eine Multiplication mit derselben Grösse $\sqrt{-1}$ entsteht, sodass dem Ausdrucke $\frac{1}{\sqrt{X}}$ in den bezeichneten Intervallen die bez. Vorzeichen

$$-\sqrt{-1}, \quad +, \quad +\sqrt{-1}, \quad -, \quad -\sqrt{-1}, \quad +,$$

zukommen, wenn man auch das vorgesetzte $\pm\sqrt{-1}$ zu den Vorzeichen zählen darf. Nach diesen Bestimmungen gelangen wir unter Anwendung jener oben angeführten Werthe u_1, u_2 etc. zu der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$

$$= -\sqrt{-1}\,u_1 + u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4 - u_5\sqrt{-1} + u_6 .$$

Da nun für $\frac{1}{x}$ an Stelle von x die beiden Grenzen zusammenfallen, so erschliesst sich uns die Beziehung

$$0 = -\sqrt{-1}\,u_1 + u_2 + u_3\sqrt{-1} - u_4 - u_5\sqrt{-1} + u_6 ;$$

oder

$$u_1 + u_5 = u_3 , \qquad u_2 + u_6 = u_4 ,$$

oder was dasselbe ist:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}} + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}} = \int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}} ,$$

$$\int_{0}^{1} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} ,$$

wobei $\sqrt{-X}$ und $\sqrt{X}$ immer positiv genommen werden. Da jedoch wegen der Zweideutigkeit des Radicales $\sqrt{X}$ ein anderer Beweis der vorstehenden bemerkenswerthen Formeln erwünscht ist, so wollen wir sie aus einem speciellen Falle des *Abel*'schen Theorems herleiten. Dies möchten wir hier genauer auseinandersetzen.

[68] 6.

Betrachten wir folgende kubische Gleichung

$$f(x) = x(1-\varkappa^2 x)(1-\mu^2 x) - h(1-x)(1-\lambda^2 x) = 0 ,$$

deren drei Wurzeln wir als Functionen von h auffassen. Sei wieder

$$1 > \varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2 ;$$

wenn h positiv ist, so erhält für

$$x = -\infty\,,\quad 0\,,\quad 1\,,\quad \frac{1}{\varkappa^2}\,,\quad \frac{1}{\lambda^2}\,,\quad \frac{1}{\mu^2}\,,\quad +\infty\,,$$

die Function $f(x)$ die Zeichen

$$-,\quad -,\quad +,\quad +,\quad -,\quad -,\quad +.$$

Daher sind die 3 Wurzeln der kubischen Gleichung reell, eine zwischen 0 und 1, die zweite zwischen $\frac{1}{\varkappa^2}$ und $\frac{1}{\lambda^2}$, die dritte zwischen $\frac{1}{\mu^2}$ und $+\infty$. Wenn h negativ ist, so wird die Function $f(x)$ für dieselben Werthe von x mit den Zeichen

$$-,\quad +,\quad +,\quad -,\quad -,\quad +,\quad +$$

der Reihe nach behaftet. Auch in diesem Falle sind also die 3 Wurzeln der kubischen Gleichung reell, die erste negativ, die übrigen positiv, und zwar die zweite zwischen 1 und $\frac{1}{\varkappa^2}$, die dritte zwischen $\frac{1}{\lambda^2}$ und $\frac{1}{\mu^2}$ gelegen.

Differentiirt man die vorgegebene Gleichung, so kommt leicht

$$\frac{\mathrm{d}h}{h\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} + \frac{1-\varkappa^2}{(1-x)\,(1-\varkappa^2 x)} + \frac{\lambda^2-\mu^2}{(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}$$
$$= \frac{1}{x\,(1-x)} - \frac{\varkappa^2-\lambda^2}{(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)} - \frac{\mu^2}{1-\mu^2 x}\,.$$

Diese Formel lehrt,

1. wenn h positiv ist und x entweder zwischen 0 und 1, oder zwischen $\frac{1}{\varkappa^2}$ und $\frac{1}{\lambda^2}$, oder zwischen $\frac{1}{\mu^2}$ und ∞ liegt,
2. wenn h negativ und x entweder negativ, oder zwischen 1 und $\frac{1}{\varkappa^2}$, oder zwischen $\frac{1}{\lambda^2}$ und $\frac{1}{\mu^2}$ liegt,

so wird der Ausdruck $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}h}$ immer positiv. In beiden Fällen mithin, mag h positiv oder negativ sein, werden alle 3 Wurzeln der kubischen Gleichung gemeinsam mit h beständig wachsen oder abnehmen. Nun aber:

für $h = -\infty$, werden die Wurzeln $-\infty,\ 1,\ \frac{1}{\lambda^2}$,

- $h = 0$, - - - $0,\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{1}{\mu^2}$,

- $h = +\infty$, - - - $1,\ \frac{1}{\lambda^2},\ +\infty$.

[69] Wenn wir daher in jedem Falle die Wurzeln mit a, b, c bezeichnen, und zwar als erste, zweite, dritte Wurzel der Grösse nach geordnet, so sehen wir, dass gleichzeitig und continuirlich wachsen:

h von 0 bis $+\infty$, a von 0 bis 1, b von $\frac{1}{\varkappa^2}$ bis $\frac{1}{\lambda^2}$,

c von $\frac{1}{\mu^2}$ bis $+\infty$,

h von $-\infty$ bis 0, a von $-\infty$ bis 0, b von 1 bis $\frac{1}{\varkappa^2}$,

c von $\frac{1}{\lambda^2}$ bis $\frac{1}{\mu^2}$.

Daher wachsen auch gleichzeitig und stetig:

h von $-\infty$ bis $+\infty$, a von $-\infty$ bis 1, b von 1 bis $\frac{1}{\lambda^2}$,

c von $\frac{1}{\lambda^2}$ bis $+\infty$.

Nun setzen wir fest, dass, wenn h von h_0 bis h_1 wächst, zugleich a von a_0 bis a_1, b von b_0 bis b_1, c von c_0 bis c_1 wachsen. Setzt man

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x),$$

so folgt durch Differentiation der vorgelegten Gleichung

$$f'(x)\,\mathrm{d}x - (1-x)(1-\lambda^2 x)\,\mathrm{d}h = 0,$$

oder wenn man substituirt

$$(1-x)(1-\lambda^2 x)\sqrt{h} =$$
$$\sqrt{[x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)]} = \sqrt{X}$$

und mit $\alpha + \beta x$ multiplicirt

$$\frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}h}{\sqrt{h}f'(x)}.$$

Setzt man in dieser Formel an Stelle von x seine drei Werthe a, b, c, so entstehen die drei Formeln:

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \int_{h_0}^{h_1} \frac{(\alpha + \beta a)\,\mathrm{d}h}{\sqrt{h} f'(a)},$$

$$\int_{b_0}^{b_1} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \int_{h_0}^{h_1} \frac{(\alpha + \beta b)\,\mathrm{d}h}{\sqrt{h} f'(b)},$$

$$\int_{c_0}^{c_1} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \int_{h_0}^{h_1} \frac{(\alpha + \beta c)\,\mathrm{d}h}{\sqrt{h} f'(c)}.$$

Da nun aber nach einem sehr bekannten algebraischen Satze

$$\frac{\alpha + \beta a}{f'(a)} + \frac{\alpha + \beta b}{f'(b)} + \frac{\alpha + \beta c}{f'(c)} = 0,$$

so geht, wenn man summirt und $\sqrt{h}$ überall mit demselben Vorzeichen nimmt, aus den drei obigen Formeln hervor:

$$\varepsilon \int_{a_0}^{a_1} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \varepsilon_1 \int_{b_0}^{b_1} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \varepsilon_2 \int_{c_0}^{c_1} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = 0;$$

die wegen der Zweideutigkeit des Radicals beizufügenden Factoren ε, ε_1, ε_2 bezeichnen entweder $+1$ oder -1.

Zur Bestimmung dieser Factoren ε, ε_1, ε_2 bemerke ich, dass in unsere Rechnung das Radical $\sqrt{X}$ an Stelle des Ausdruckes

$$\sqrt{X} = (1 - x)(1 - \lambda^2 x)\sqrt{h}$$

[**70**] in unsere Rechnung eingeführt wurde, ein Ausdruck, der mit demselben Vorzeichen behaftet ist, wenn x zwischen $-\infty$ und 1 und auch wenn es zwischen $\frac{1}{\lambda^2}$ und $+\infty$ liegt, mit entgegengesetztem Vorzeichen aber, wenn x zwischen 1 und $\frac{1}{\lambda^2}$ liegt; oder für die erste und dritte Wurzel, a und c, hat es das gleiche Vorzeichen, für die zweite Wurzel b dagegen das entgegengesetzte. Daher darf man setzen

$$\varepsilon = -\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Dadurch wird unsere Gleichung

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \int_{c_0}^{c_1} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \int_{b_0}^{b_1} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} .$$

In dieser Gleichung müssen die drei Radicale $\sqrt{X}$ mit demselben Vorzeichen genommen werden.

Wir sehen auch, dass

$$a_0 = 0\,, \qquad b_0 = \frac{1}{\varkappa^2}, \qquad c_0 = \frac{1}{\mu^2},$$

und

$$a_1 = 1\,, \qquad b_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad c_1 = +\infty$$

zusammengehörige Werthe sind, die den Werthen

$$h_0 = 0\,, \qquad h_1 = +\infty$$

entsprechen. Dann aber entspringt der vorgelegten Formel die Gleichung

$$\int_0^1 \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} .$$

Ferner wird gleichzeitig

$$a_0 = -\infty\,, \qquad c_0 = 1\,, \qquad c_0 = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$a_1 = 0\,, \qquad b_1 = \frac{1}{\varkappa^2}, \qquad c_1 = \frac{1}{\mu^2},$$

entsprechend den Werthen von h

$$h_0 = -\infty\,, \qquad h_1 = 0\,.$$

Aus der aufgestellten Formel fliesst damit, wenn wir zugleich durch $\sqrt{-1}$ dividiren:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}} + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}} = \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}} .$$

Auch in diesen Formeln müssen die Wurzeln $\sqrt{X}$ und $\sqrt{-X}$ mit demselben Vorzeichen genommen werden. Dies sind die Formeln, die zu beweisen wir uns vornahmen und die wir

aus der obigen allgemeineren Formel über unbestimmte Integrale hergeleitet haben.

Bei der vorliegenden Frage war vorausgesetzt, dass h die Variable x nicht enthalte; das von *Abel* aufgestellte Theorem stützt sich auf die viel allgemeinere Annahme, dass h das Quadrat irgend einer rationalen Function von x sei.

[71] 7.

Im Vorhergehenden ist dargethan, dass sich die sechs von uns aufgefundenen Indices

$$u_1\sqrt{-1}, \quad u_2, \quad u_3\sqrt{-1}, \quad u_4, \quad u_5\sqrt{-1}, \quad u_6$$

mit Hülfe der Formeln

$$u_1 + u_5 = u_3, \qquad u_2 + u_6 = u_4$$

auf vier zurückführen lassen.

Als solche setzen wir fest

$$u_2, \qquad u_6; \qquad u_1\sqrt{-1}, \qquad u_5\sqrt{-1}.$$

Allgemein aber können weder u_2 und u_6 noch $u_1\sqrt{-1}$ und $u_5\sqrt{-1}$ auf denselben Index zurückgeführt werden, oder es sind u_2 und u_6, sowie auch u_1 und u_5 unter sich incommensurabel. Daher wird die Function $x = \lambda(u)$ vier Indices haben, die nicht auf eine geringere Anzahl zurückgeführt werden können, oder sie wird vierfach periodisch sein. Dass es schon keine dreifach periodische Function giebt, ist oben ausführlich dargelegt. Dass aber dieser Fall, wo zwei incommensurable Indices reell, zwei incommensurable imaginär von der Form $u_1\sqrt{-1}$, $u_5\sqrt{-1}$ sind, absurd ist, steht schon aus § 1 fest. Es gäbe nämlich zufolge der dort angestellten Erörterungen für die Function $x = \lambda(u)$ Indices Δ und $\Delta'\sqrt{-1}$, wo Δ und Δ' reelle Grössen und kleiner sind als irgend eine gegebene beliebig kleine Grösse. Daher würde die Function $\lambda(u)$ ungeändert bleiben, während u alle reellen oder imaginären Werthe annehmen könnte oder unter der Zahl der Werthe, die u bei ungeänderter Function $\lambda(u)$ annehmen könnte, würden immer etliche sein, die sich von irgend einer reellen oder imaginären Grösse um weniger unterscheiden, als eine beliebig kleine gegebene Grösse. Das aber ist absurd.

Zu noch mehr Perioden kommen wir, wenn die Function X, die unter der Wurzel steht, zu höherem als dem 5^{ten} oder 6^{ten} Grade ansteigt. Im Allgemeinen nämlich, wenn X von der $2n^{\text{ten}}$ oder $(2n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist und man setzt

$$u = \int \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}},$$

wo $f(x)$ irgend eine gegebene ganze rationale Function ist, erscheint x als Function von u mit $2n-2$ Indices, die ausser in Specialfällen nicht auf eine geringere Zahl zurückgeführt werden können; und zwar sind, wenn die Coefficienten von X reelle Grössen sind, $n-1$ reell, $n-1$ imaginär.

Auf dieselbe Weise nämlich, wie oben, wird im allgemeinen Falle das Folgende dargelegt. Sei

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\varkappa_1^2 x)\ldots\ldots(1-\varkappa_{2n-4}^2 x),$$

wo

$$1 > \varkappa^2 > \varkappa_1^2 \ldots\ldots > \varkappa_{2n-5}^2 > \varkappa_{2n-4}^2;$$

die Gleichung n^{ter} Ordnung **[72]**

$$x(1-\varkappa^2 x)(1-\varkappa_2^2 x)\cdots(1-\varkappa_{2n-4}^2 x) = h(1-x)(1-\varkappa_1^2 x)\cdots(1-\varkappa_{2n-5}^2 x)$$

hat n reelle Wurzeln; bezeichnen wir diese der Grösse nach mit $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, so wird, wenn h von $-\infty$ bis 0 und dann von 0 bis $+\infty$ wächst, a_1 von $-\infty$ bis 0 und darauf von 0 bis 1 zunehmen;

$$a_2 \text{ von } 1 \text{ bis } \frac{1}{\varkappa_2^2} \text{ und sodann von } \frac{1}{\varkappa_2^2} \text{ bis } \frac{1}{\varkappa_1^2},$$

allgemein

$$a_m \text{ von } \frac{1}{\varkappa_{2m-5}^2} \text{ bis } \frac{1}{\varkappa_{2m-4}^2} \text{ und sodann von } \frac{1}{\varkappa_{2m-4}^2} \text{ bis } \frac{1}{\varkappa_{2m-3}^2},$$

und zuletzt

$$a_n \text{ von } \frac{1}{\varkappa_{2n-5}^2} \text{ bis } \frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2} \text{ und sodann von } \frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2} \text{ bis } +\infty.$$

Wenn nun, während h von $h^{(0)}$ bis h' wächst, a_m von $a_m^{(0)}$ bis a'_m zunimmt, so wird aus

$$\int_{a_1^{(0)}}^{a'_1} \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} - \int_{a_2^{(0)}}^{a'_2} \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \cdots\cdots \pm \int_{a_n^{(0)}}^{a'_n} \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = 0,$$

wobei $f(x)$ eine beliebige ganze rationale Function $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bezeichnet. Aus dieser Formel gehen zwei specielle hervor

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{-X}}-\int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{-X}}+\int_{\frac{1}{\varkappa_1^2}}^{\frac{1}{\varkappa_2^2}}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{-X}}\cdots$$

$$\pm\int_{\frac{1}{\varkappa_{2n-5}^2}}^{\frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2}}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{-X}}=0,$$

$$\int_{0}^{1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}-\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\varkappa_1^2}}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}+\int_{\frac{1}{\varkappa_2^2}}^{\frac{1}{\varkappa_3^2}}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}\cdots$$

$$\pm\int_{\frac{1}{\varkappa_{2n-4}^2}}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}=0.$$

In diesen Formeln sind die n Wurzeln $\sqrt{X}$ und $\sqrt{-X}$ mit demselben Vorzeichen zu nehmen. Es werden die $2n$ hingeschriebenen bestimmten Integrale, wenn man sie verdoppelt und bei den n ersteren $\sqrt{X}$ an Stelle von $\sqrt{-X}$ schreibt, die Indices der Function $x=\lambda(u)$ sein, n davon reell und n imaginär, die durch die zwei vorhergehenden Gleichungen auf $n-1$ reelle und $n-1$ imaginäre zurückkommen; nur in speciellen Fällen können sie auf eine geringere Zahl zurückgeführt werden.

8.

Aus dem Vorausgeschickten schliessen wir:
»*gerade so wie die Kreisbogen für denselben Sinus unzählige von einander gleichweit abstehende Werthe annehmen, gerade so wie es zu demselben Numerus unzählige Logarithmen giebt, die von einander um dieselbe imaginäre Grösse abstehen; gerade so wie die elliptischen Integrale für denselben Werth des Sinus der Amplitude doppelt unendlich viele Werthe annehmen, da ja sowohl ihre reellen,*

»*wie ihre imaginären Bestandtheile zugleich unzählig viele* »*Werthe erreichen, die von einander gleich weit abstehen,* »[**73**] *so führen die Abel'schen oder hyperelliptischen Inte-* »*grale, d. h. Integrale, in denen unter dem Integralzeichen* »*eine Quadratwurzel aus einer Function von höherem als dem* »*4ten Grade steht, eine so starke Vielfachheit von Werthen* »*mit sich, dass sie für willkürlich gegebene Grenzen alle* »*beliebigen reellen oder imaginären Werthe annehmen, oder* »*dass sich unter all den Werthen, die dasselbe Integral für* »*dieselben willkürlich gegebenen Grenzen annehmen kann,* »*immer solche befinden, die sich von einem beliebigen ge-* »*gebenen reellen oder imaginären Werthe um weniger unter-* »*scheiden als irgend eine gegebene, noch so kleine Grösse.*«

Es ist aus dem Vorhergehenden klar, dass, sowie X von höherem als dem 4ten Grade ist, x nicht mehr als analytische Function von u angesehen werden kann; auch sieht man nicht, wie man die allgemeinen Methoden, auf deren Grund ehedem die analytische Trigonometrie und jüngst die Theorie der elliptischen Functionen aufgebaut ist, auf die *Abel*'schen Transcendenten anwenden könnte. Doch aus dieser gleichsam verzweifelten Lage giebt einen einzigen Ausweg eine Ueberlegung, die wir von ganz anderen Betrachtungen ausgehend in einer früheren Abhandlung (*Cr.* J. Bd. 9 S. 394 fgg.) auseinandergesetzt haben und die allein nach unserer Meinung geeignet ist, die *Abel*'schen Transcendenten in die Analysis einzuführen, und hier die Schwierigkeiten, die aus der Vielfachheit der Integralwerthe entstehen, hebt. Diese Sache will ich mit einer leichten Aenderung kurz wiederholen.

9.

Sei wiederum X eine rationale ganze Function 5ter oder 6ter Ordnung; wir wollen setzen

$$\int_a^x \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = u\,,$$

$$\int_a^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha'+\beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = u'\,,$$

wo a, b, α, β, α', β' Constante bezeichnen. x und y dürfen als Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$Ux^2 - U'x + U'' = 0$$

betrachtet werden, wo U, U', U'' Functionen von u, u' sind. Wenn nun u als Summe mehrerer Integrale

$$\int \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$

und zugleich u' als Summe von ebensoviel Integralen

$$\int \frac{(\alpha' + \beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$

gegeben wird, die bez. zwischen denselben Grenzen genommen werden: so erhält man aus dem *Abel*'schen Theorem U, U', U'' als *rationale* Functionen dieser Grenzen und der Werthe, [**74**] die $\sqrt{X}$ für dieselben annimmt. Und in diesem Falle werden daher die beiden transcendenten Gleichungen auf algebraische zurückgeführt. Dies ist die geeignete Anwendungsweise des *Abel*'schen Theorems, wenn X den 5^{ten} oder 6^{ten} Grad hat.

Ein sehr einfaches Beispiel dieses umfassenden Theorems haben wir oben gegeben. Es folgt nämlich aus dem früher Erkannten, wenn wir setzen

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x),$$

wo $1 > \varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2$, und unter der Annahme der beiden transcendenten Gleichungen

$$\int_0^x \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^y \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^z \frac{(\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}},$$

$$\int_0^x \frac{(\alpha' + \beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^y \frac{(\alpha' + \beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^z \frac{(\alpha' + \beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}},$$

dass x, y sich durch z ausdrücken lassen als Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\frac{(1-z)(1-\lambda^2 z)x(1-\varkappa^2 x)(1-\mu^2 x) - z(1-\varkappa^2 z)(1-\mu^2 z)(1-x)(1-\lambda^2 x)}{x-z} = 0,$$

oder

$$Ux^2 - U'x + U'' = 0,$$

wo

$$U = \varkappa^2\mu^2(1-z)(1-\lambda^2 z)\,,$$
$$U' = \varkappa^2+\mu^2+[\lambda^2-(\varkappa^2+\mu^2)(1+\lambda^2)-\varkappa^2\mu^2]z+\varkappa^2\mu^2(1+\lambda^2)z^2\,,$$
$$U'' = (1-\varkappa^2 z)(1-\mu^2 z)\,.$$

Wir haben nämlich bewiesen, dass eine andere transcendente Gleichung statt habe, wenn x, y, z Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x(1-\varkappa^2 x)(1-\mu^2 x) = h(1-x)(1-\lambda^2 x)$$

sind; aus ihr erhalten wir nach Elimination von h mit Hülfe der Formel

$$h = \frac{z(1-\varkappa^2 z)(1-\mu^2 z)}{(1-z)(1-\lambda^2 z)}$$

und nach Division durch $x-z$, die übrigen Wurzeln x, y als Wurzeln der vorgelegten quadratischen Gleichung. Da nun jene Gleichung in keiner Weise durch die Constanten α, β berührt wird, so genügen dieselben algebraischen Gleichungen zwischen x, y, z auch einer anderen transcendenten Gleichung, in der sich statt α, β andere Constanten α', β' vorfinden. Auch würde nichts Neues hinzugefügt werden, wenn wir eine dritte transcendente Gleichung anreihten, in der wieder andere Constanten α'', β'' für α, β gesetzt sind. Denn wenn durch die zwischen x, y, z bestehenden Beziehungen den beiden vorgelegten transcendenten Gleichungen genügt ist, so entspringt eine neue Gleichung

$$\int_0^x \frac{(m+nx)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^y \frac{(m+nx)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^z \frac{(m+nx)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}\,,$$

was auch die Constanten m, n sein mögen, ganz von selbst.

[75] 10.

Wir haben oben sechs Substitutionen der Form

$$x = \frac{d+e\sin^2\varphi}{f+g\sin^2\varphi}$$

gegeben, mit deren Hülfe wir in den verschiedenen Intervallen, zwischen denen x enthalten ist, das Integral

$$\int \frac{(\alpha + \beta x) \mathrm{d} x}{\sqrt{X}}$$

in die Form brachten, die eine Entwickelung in folgende convergente Reihe gestattet

$$\int_a^x \frac{(\alpha + \beta x) \mathrm{d} x}{\sqrt{X}} = C + \frac{2A}{\pi} \varphi + A' \sin 2\varphi + A'' \sin 4\varphi + A''' \sin 6\varphi \cdots$$

Da nun jene Substitutionen keineswegs von den Constanten α, β abhängen, so wird in jedem Falle durch dieselbe Substitution auch für andere Constanten α', β' die convergente Entwickelung

$$\int_a^x \frac{(\alpha' + \beta' x) \mathrm{d} x}{\sqrt{X}} = C' + \frac{2B}{\pi} \varphi + B' \sin 2\varphi + B'' \sin 4\varphi + B''' \sin 6\varphi + \cdots$$

gefunden. Für einen gegebenen anderen Werth y erhält man durch dieselbe Substitution oder durch eine andere

$$y = \frac{d' + e' \sin^2 \psi}{f' + g' \sin^2 \psi},$$

die für das Intervall, in dem sich y bewegt, anzuwenden ist, die folgenden convergenten Entwickelungen:

$$\int_b^y \frac{(\alpha + \beta x) \mathrm{d} x}{\sqrt{X}} = C_3 + \frac{2A_1}{\pi} \psi + A_1' \sin 2\psi + A_1'' \sin 4\psi + A_1''' \sin 6\psi + \cdots$$

$$\int_b^y \frac{(\alpha' + \beta' x) \mathrm{d} x}{\sqrt{X}} = C_1' + \frac{2B_1}{\pi} \psi + B_1' \sin 2\psi + B_1'' \sin 4\psi + B_1''' \sin 6\psi + \cdots$$

Setzt man

$$\int_a^x \frac{(\alpha + \beta x) \mathrm{d} x}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha + \beta x) \mathrm{d} x}{\sqrt{X}} = u,$$

$$\int_a^x \frac{(\alpha' + \beta' x) \mathrm{d} x}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha' + \beta' x) \mathrm{d} x}{\sqrt{X}} = u',$$

so erkennt man jetzt, dass bei Aenderung von φ in $\varphi + m\pi$, von ψ in $\psi + m'\pi$, wo m, m' beliebige ganze positive oder negative Zahlen vorstellen, gleichzeitig

$$u \text{ in } u + 2mA + 2m'A_1$$
$$u' \text{ in } u' + 2mB + 2m'B_1$$

übergeht, dass aber x und y beide ungeändert bleiben. Hier sind A, A_1 zweien von den früher angegebenen sechs Grössen

$$\frac{u_1}{\sqrt{-1}}, \quad u_2, \quad u_3\sqrt{-1}, \quad -u_4, \quad -u_5\sqrt{-1}, \quad u_6,$$

gleich, und zwar beide derselben oder verschiedenen, und B, B_1 sind die Grössen, in die A, A_1 [76] übergehen, wenn an Stelle von α, β gesetzt wird α', β'. Wenn dabei jene sechs Grössen in die folgenden

$$\frac{u_1'}{\sqrt{-1}}, \quad u_1', \quad u_3'\sqrt{-1}, \quad -u_4', \quad -u_5'\sqrt{-1}, \quad u_6'$$

übergehen, so folgt, dass bei gleichzeitiger Aenderung von

$$u \text{ in } u + \frac{2mu_1}{\sqrt{-1}} + 2m'u_2 + 2m''u_5\sqrt{-1} + 2m'''u_6$$

und von

$$u' \text{ in } u' + \frac{2mu_1'}{\sqrt{-1}} + 2m'u_2' + 2m''u_5'\sqrt{-1} + 2m'''u_6'$$

sich x, y nicht ändern; m, m', m'', m''' bezeichnen beliebige ganze Zahlen. Die Indices $2u_3\sqrt{-1}$, $2u_4$ und die entsprechenden $2u_3'\sqrt{-1}$, $2u_4'$ haben wir weggelassen, da sie auf die übrigen zurückgeführt werden. Gefunden ist daher folgendes für die Perioden unserer Functionen grundlegende Theorem:

Fundamental-Theorem.

Sei

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x),$$

sei ferner

$$2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}} = i_1, \qquad 2\int_{0}^{1} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = i_2,$$

$$2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}} = i_3, \qquad 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = i_4,$$

$$2\int_{-x}^{0}\frac{(\alpha'+\beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}}=i'_1,\qquad 2\int_{0}^{1}\frac{(\alpha'+\beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}=i'_2,$$

$$2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{(\alpha'+\beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-X}}=i'_3,\qquad 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\frac{(\alpha'+\beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}=i'_4;$$

seien endlich x, y betrachtet als Functionen

$$x=\lambda(u,u'),\qquad y=\lambda'(u,u')$$

von Grössen u, u', die durch die Gleichungen

$$\int_a^x\frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}+\int_b^y\frac{(\alpha+\beta x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}=u,$$

$$\int_a^x\frac{(\alpha'+\beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}+\int_b^y\frac{(\alpha'+\beta' x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}=u',$$

gegeben sind, so wird sein:

$$\lambda\begin{pmatrix}u+mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4,\\ u'+mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4\end{pmatrix}=\lambda(u,u'),$$

$$\lambda'\begin{pmatrix}u+mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4,\\ u'+mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4\end{pmatrix}=\lambda'(u,u'),$$

welches auch die Werthe der positiven oder negativen ganzen Zahlen m, m', m'', m''' sein mögen.

[**77**] Die Art der Periodicität, die im soeben ausgesprochenen Theorem erklärt ist, hat nichts, was den Gesetzen der analytischen Functionen zuwider liefe. Freilich lassen sich immer Zahlen m, m', m'', m''' so bestimmen, dass einer der beiden Ausdrücke

$$u+m'i_2+m'''i_4+(mi_1+m''i_3)\sqrt{-1},$$
$$u'+m'i'_2+m'''i'_4+(mi'_1+m''i'_3)\sqrt{-1}$$

von einer beliebigen gegebenen Grösse

$$p+q\sqrt{-1}$$

um weniger als irgend eine noch so kleine gegebene Grösse abweicht; doch kann dies im Allgemeinen nur dadurch erreicht werden, dass jene Zahlen über alle Grenzen wachsen;

wenn also der eine Ausdruck der gegebenen Grösse fast unendlich nahe kommt, so wird der andere zugleich unendlich gross werden. Daher sehen wir, dass in unseren vierfach periodischen Functionen zweier Veränderlicher

$$x = \lambda(u, u'), \qquad y = \lambda'(u, u')$$

dann das eine Argument unbestimmt wird, wenn das andere ins Unendliche geht. Das aber hat nichts Absurdes.

Wir sehen, dass man für dieselben Werthe von x, y nicht nur das eine Argument um eine bestimmte Grösse ändern darf, während das andere ungeändert bleibt, sondern dass immer jedes der beiden Argumente eine Aenderung erleidet, so dass durch den Index des einen Arguments der des anderen durchaus bestimmt ist. Das ist die charakteristische Eigenschaft dieser Art von Periodicität, ohne die sie nicht bestehen könnte.

11.

Nach dem *Abel*'schen Theorem steht fest, dass wenn

$$x = \lambda(u, u'), \qquad y = \lambda'(u, u')$$

gesetzt wird, die Functionen

$$x_n = \lambda(nu, nu'), \qquad y_n = \lambda'(nu, nu')$$

als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$U_n x^2 - U_n' x + U_n'' = 0$$

gegeben sind, wobei U_n, U_n', U_n'' rationale Functionen von x, y, $\sqrt{X}$, $\sqrt{Y}$ sind, wenn Y dieselbe Function von y wie X von x ist. Daher ist auch offenbar, dass man umgekehrt x, y aus x_n, y_n durch die Auflösung algebraischer Gleichungen erhalten kann. Auch kann man aus dem fundamentalen Theorem bereits schliessen, dass deren Ordnung n^4 sein wird. Für $n = 2$ kann man dies mit Hülfe des *Abel*'schen Theorems bestätigen; und dasselbe Theorem liefert uns sogar leicht die Auflösung der Gleichung 16^{ten} Grades, die bei der Zweitheilung [**78**] auftritt, durch blosse Ausziehung von Quadratwurzeln. Das wollen wir bei anderer Gelegenheit weiter verfolgen.

Wenn aber Transformationen gegeben sind, so schliesst man leicht aus demselben Theorem, dass man zur Multipli-

cation gelangt, indem man vier Transformationen n^{ter} Ordnung nach einander anwendet; daher wird die Gleichung vom Grade n^4, die bei der Zerlegung in n Theile erforderlich ist, auf vier Gleichungen n^{ten} Grades zurückgeführt, wenn man die Theilung der Indices als bekannt voraussetzt. Diese aber hängt, wenn n Primzahl ist, wie man leicht schliesst, von einer Gleichung der Ordnung $1 + n + n^2 + n^3$ ab, die im Allgemeinen nicht lösbar ist, und von einer zweiten Gleichung der Ordnung $\frac{n-1}{2}$, die eine Lösung zulässt, sofern man die Wurzeln jener als bekannt voraussetzt. Auch wird, wenn n Primzahl ist, $1 + n + n^2 + n^3$ die Zahl der Transformationen derselben n^{ten} Ordnung sein und von diesen werden $2(n + 1)$ reell sein.

Geschrieben 14. Febr. 1834.

Anmerkungen.

Die berühmte Abhandlung von *Jacobi*, die hier in deutscher Uebersetzung den Mathematikern vorgelegt wird, ist zuerst im 13. Bande des *Crelle*'schen Journals im Druck erschienen, und trägt das Datum 14. Febr. 1834. Ein Vorläufer ist die im 9. Bande desselben Journals gedruckte Abhandlung vom 12. Juli 1832 »Considerationes generales de transcendentibus Abelianis«. Beide Abhandlungen sind wieder abgedruckt im 2. Bande der Gesammtausgabe von *Jacobi*'s Werken. In unserer Arbeit legt *Jacobi* die ersten festen Grundlagen für die Theorie der mehrfach periodischen Functionen, die als die Umkehrungs-Functionen der algebraischen Integrale auftreten.

Unsere Abhandlung behandelt zwei verschiedene darauf bezügliche Fragen.

Den ersten Theil bildet eine Untersuchung über die Möglichkeit von Functionen einer Variablen mit mehr als zwei nicht auf eine kleinere Anzahl zurückführbaren Perioden oder mit zwei reellen incommensurabeln Perioden.

Jacobi leitet hier den Satz ab, dass eine Function einer Veränderlichen mit drei Perioden, zwischen denen keine lineare homogene Gleichung mit rationalen Coëfficienten besteht, nothwendig eine Periode haben muss, deren absoluter Werth, ohne gleich Null zu sein, unter einer beliebig kleinen Zahl liegt, oder, wie man sich kurz ausdrückt, eine unendlich kleine Periode. Dasselbe findet statt bei Functionen mit zwei Perioden, die in einem reellen, nicht rationalen Verhältniss zu einander stehen. Diese Beweise sind vollkommen einwandsfrei. Nun aber sagt *Jacobi* mit kurzen Worten, ohne weitere Begründung, dass solche Functionen unmöglich seien, dass ihre Annahme absurd sei (S. 4, 14), und dieser Punkt hat in der Folge zu mannigfachen Bedenken und Erörterungen Anlass gegeben. Der Erste, der dagegen einen Einwand erhob, war wohl *Göpel* in seiner Abhandlung im 35. Band von *Crelle*'s Journal (Theoriae Transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis [1847]), die in einem der nächsten Bändchen

dieser Sammlung erscheinen soll. In einer Redactionsnote hat jedoch *Jacobi* diesen Einwand kurz zurückgewiesen.

Vollständige Einsicht in diese Frage, wenigstens soweit sie sich auf die *Abel*'schen Transcendenten bezieht, ist aber schon in der grossen *Riemann*'schen Abhandlung über *Abel*sche Functionen (*Crelle*'s Journal Bd. 54 1857) zu finden. Alles wird unmittelbar anschaulich, wenn man die *Riemann*schen mehrblättrigen Flächen und die conforme Abbildung zu Rathe zieht. Dann ergiebt sich, wie *Riemann* in Art. 12 nachgewiesen hat, dass durch ein einzelnes Integral erster Gattung vom Geschlechte p die einfach zusammenhängende *Riemann*'sche Fläche, in der die *Abel*'schen Integrale eindeutig dargestellt sind, auf ein endliches Flächenstück abgebildet wird, welches von p Parallelogrammen begrenzt wird.

Das Flächenstück wird bei Veränderung des Argumentes um Perioden mit sich selbst congruent wiederholt, und diese Wiederholungen bedecken, wenn p grösser als 1 ist, die Ebene unendlich oft. Es entsteht also eine unendlich vieldeutige $2p$fach periodische Function, die aber in der Umgebung eines jeden einzelnen Werthes den Charakter einer analytischen Function hat. Diese $2p$fach periodischen Functionen sind aber an sich keineswegs absurd, sondern sehr wohl definirt und verständlich.

Es ist jetzt wohl schwer noch festzustellen, welche Vorstellung *Jacobi* über diesen Punkt hatte und wie seine kurzen Aussprüche in der vorliegenden Abhandlung zu verstehen sind. Dass er bereits eine der *Riemann*'schen ähnliche klare Anschauung hatte, halten wir nicht für wahrscheinlich. Wahrscheinlich ist aber die von *Hermite* ausgesprochene Ansicht richtig, dass *Jacobi* dabei nur an eindeutige analytische Functionen gedacht hat, die sich nach Art der elliptischen verhalten. Dass es solche Functionen mit unendlich kleiner Periode nicht giebt, und dass also für diese *Jacobi*'s Ausspruch vollständig zutreffend ist, können wir kurz so zeigen.

Wenn $f(z)$ eine einwerthige analytische Function des complexen Argumentes z ist und z_0 eine beliebige nicht singuläre Stelle, so lässt sich bekanntlich z in einer endlichen Umgebung von z_0 in eine Reihe der Form

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{1 \cdot 2} f''(z_0) + \cdots$$

entwickeln.

Wenn nun alle Differentialquotienten $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, ... verschwinden, so ist $f(z)$ eine Constante und jeder beliebige Werth kann als Periode betrachtet werden. Andernfalls sei $f^{(\nu)}(z_0)$ der erste nicht verschwindende Differentialquotient. Dann ist

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)^\nu} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu} f^{(\nu)}(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\nu+1)} f^{(\nu+1)}(z_0) + \dots$$

und nun kann man um den Punkt z_0 eine Umgebung abgrenzen, in der die rechte Seite dieses Ausdrucks überall von Null verschieden ist. Hat nun aber $f(z)$ eine unendlich kleine Periode, so giebt es in dieser Umgebung einen von z_0 verschiedenen Punkt z, für den $f(z) = f(z_0)$ ist, und dies ergiebt uns einen Widerspruch.

Bei Functionen eines reellen Argumentes genügt schon die Annahme der *Eindeutigkeit* und *Stetigkeit*, um die Unmöglichkeit einer unendlich kleinen reellen Periode bei nicht constanten Functionen nachzuweisen.

Wenn nämlich eine Function reellen Argumentes, $f(x)$, eine unendlich kleine Periode hat, so hat sie auch eine Periode, die jedem gegebenen Werth α beliebig nahe kommt. Denn ist p eine Periode, so lässt sich eine ganze Zahl m finden, so dass

$$mp \lesseqgtr \alpha \lesseqgtr (m+1)\,p\,,$$

und mp ist eine Periode, die von α um weniger als p absteht. Wenn nun $f(x)$ nicht constant ist, so können wir α für ein gegebenes x_0 so wählen, dass $f(x_0+\alpha)$ von $f(x_0)$ verschieden ist, also etwa

$$f(x_0+\alpha) = f(x_0) + a\,,$$

worin a von Null verschieden ist. Nun giebt es aber in beliebiger Nähe von $x_0+\alpha$ Werthe von x, für die $f(x) = f(x_0)$ ist, und dies widerspricht der vorausgesetzten Stetigkeit.

Unter der Periode einer mehrdeutigen Function ist eine constante Grösse zu verstehen, um die man das Argument verändern kann, ohne dass die *Gesammtheit der Functionswerthe*, die zu einem Argumentwerthe gehören, sich verändert. Nach dieser Festsetzung ist der *Jacobi*'sche Satz nicht bloss für einwerthige, sondern auch für mehrwerthige Functionen richtig, wenn nur die Anzahl der zu einem Argumentwerth gehörigen Functionswerthe endlich ist. Man

braucht, um dies einzusehen, die vorhergehenden Betrachtungen nur auf die symmetrischen Functionen anzuwenden, die aus den verschiedenen Functionswerthen zu bilden sind, speciell auf die Coëfficienten der algebraischen Gleichung, deren Wurzeln diese Functionswerthe sind. Ist aber die Function eine unendlich vieldeutige, dann versagen diese Schlüsse.

Hierauf hat, ohne auf *Riemann* Bezug zu nehmen, im Jahre 1863 *Casorati* hingewiesen und auf anderem Wege gezeigt, dass unendlich vieldeutige Functionen von mehreren Perioden sehr wohl gebildet werden können (Comptes rendus der Pariser Akademie Bd. 57. 58. 1863, 1864). In einer Note zu diesen Mittheilungen *Casorati*'s spricht *Hermite* seine oben erwähnte Ueberzeugung über *Jacobi*'s Meinung aus: »Es sei mir erlaubt, zu bemerken, dass nach meiner Ueberzeugung *Jacobi* nie andere (als eindeutige) Functionen im Auge gehabt hat«.

Casorati ist mehrfach auf den Gegenstand zurückgekommen (man vgl. »Sopra il teorema di Jacobi riguardante la periodicità etc.« Rendiconti del R. Istituto Lombardo Ser. II vol. XV 1882; »Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes« Mailand 1885, Acta Mathematica Bd. VIII 1886).

Die entsprechenden Fragen für Functionen von mehreren Variablen sind näher untersucht worden von *Riemann* (»Beweis des Satzes, dass eine einwerthige, mehr als $2n$ fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist«, Auszug aus einem Schreiben *Riemann*'s an *Weierstrass* vom 26. October 1859 [*Crelle*'s Journal Bd. 71]) und von *Weierstrass* (Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen, Monatsbericht der Berliner Akademie 1876 [abgedruckt mit einigen Noten in der Sammlung »Abhandlungen aus der Functionentheorie« Berlin 1886]).

Die Periodicität der Functionen mehrerer reellen Variablen hat *Kronecker* untersucht (Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 20. Nov. 1881).

Im zweiten Theil der Abhandlung wird nun von *Jacobi* nachgewiesen, dass man, wenn man bei einem hyperelliptischen Integral erster Ordnung eine algebraische Function der Grenze als Function des Integrals auffasst, sechs verschiedene Perioden erhält, die sich zwar auf vier, aber nicht auf eine noch geringere Zahl zurückführen lassen, und da er im ersten Theil

dargethan hat, dass Functionen von vier Perioden, wie er sie sucht, nicht existiren, so ist zu schliessen, dass hier eine Umkehrung, wie sie bei den elliptischen Integralen so elegante Resultate ergeben hat, nicht auszuführen ist. *Jacobi* untersucht nun ferner die Frage, in welchem Sinne gleichwohl eine Verallgemeinerung seiner Theorie der elliptischen Functionen möglich sei, und findet sie darin, dass er gleichzeitig zwei Summen von je zwei dieser hyperelliptischen Integrale erster Gattung als unabhängige Variablen einführt. Die so definirten vierfach periodischen Functionen zweier unabhängiger Veränderlichen haben nichts, was dem Functionsbegriff widerstreitet. Dass auf diesem Wege aber wirklich eindeutige, analytische, vierfach periodische Functionen zweier Argumente gewonnen werden, ist in der *Jacobi*'schen Abhandlung noch nicht nachgewiesen. Dies ist durch wirkliche Darstellung dieser Functionen von *Rosenhain*, unter directem Einfluss von *Jacobi*, und davon unabhängig von *Göpel* geleistet.

Auf ganz anderen Grundlagen und in sehr viel allgemeinerem Sinne ist dann die Theorie der *Abel*'schen Transcendenten, wie diese Umkehrungsfunctionen schon von *Jacobi* genannt wurden, von *Weierstrass* und *Riemann* ausgebaut worden. (*Weierstrass*, »Zur Theorie der *Abel*'schen Functionen«, *Crelle*'s Journal Bd. 47 [1854], »Theorie der *Abel*schen Functionen«, Ebenda Bd. 52 [1856]; *Riemann*, »Theorie der *Abel*'schen Functionen«, Ebenda Bd. 54 [1857]).

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.